Die Kalibrierung von Sterbetafeln für Altersrentner mit Hilfe der mehrdimensionalen Kredibilitätstheorie

Frank Weber (AXA Winterthur) Alois Gisler (ETH Zürich)

Winterthur, den 06. September 2013

Daten

Anzahl der Lebenden und daraus abgeleitete Grössen

Gegeben sei eine vom Geburtsjahr $g \in G_m = \{g_1, \ldots, g_m\}$ und vom Alter $x \in X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$ abhängige Sterbetafel $\mathcal{Q}_m = \{q_{g,x}\,;\ (g,x) \in X_m \times G_m\}$, deren Angemessenheit für einen Bestand an Altersrentnern überprüft werden soll.

Durch Auszählung aller Personen des Bestandes, welche

- bis zur Vollendung des x_1-ten Lebensjahres in den Bestand eingetreten sind und
- bis zum Beobachtungsdatum gestorben sind oder dem Bestand noch angehören,

resultieren die Anzahlen $\ell_{g,x}$ lebender Personen, $g \in G_{m+1}$, $x \in X_{m+1}$, $g + x \leq 2012$.

Beispiel (Männer, $x_1 = 65$, $m = 8$):

Geburts-	Vollendetes Altersjahr x								
jahr g	65	66	67	68	69	70	71	72	73
1939	876	867	855	849	838	823	814	808	800
1940	922	910	897	886	867	855	843	836	
1941	1’058	1’045	1’031	1’017	1’005	990	973		
1942	1’127	1’115	1’107	1’098	1’080	1’064			
1943	1’282	1’270	1’251	1’233	1’215				
1944	1’319	1’305	1’289	1’278					
1945	1’398	1’391	1’376						
1946	1’479	1’469							
1947	1’497								

Daten

Anzahl der Lebenden und daraus abgeleitete Grössen

Aus den Anzahlen $\ell_{g,x}$ lebender Personen lassen sich

- die erwarteten Anzahlen an Todesfällen, $e_{g,x} = q_{g,x}\,\ell_{g,x}$,
- die beobachteten Anzahlen an Todesfällen, $d_{g,x} = \ell_{g,x+1} - \ell_{g,x}$, sowie
- die beobachteten Auslenkungen $f_{g,x} = d_{g,x}/e_{g,x}$

ableiten. Für Summen bzw. Mittelwerte dieser Grössen gelten die Notationen

$$e_{g,+} = \sum_x e_{g,x} \ , \quad e_{+,+} = \sum_g \sum_x e_{g,x} \ , \quad f_{g,\bullet} = \frac{d_{g,+}}{e_{g,+}} \ , \quad f_{\bullet,\bullet} = \frac{d_{+,+}}{e_{+,+}} \ .$$

Fortführung des Beispiels (Abweichungen zur Schweizer Sterbetafel GRM 95):

Geburts-jahr g	Vollendetes Altersjahr x: 65	66	67	68	69	70	71	72	$f_{g,\bullet}$
1939	0.75	0.95	0.45	0.77	0.98	0.55	0.34	0.41	0.63
1940	0.95	0.98	0.78	1.27	0.76	0.71	0.38		0.81
1941	0.90	0.92	0.87	0.70	0.82	0.86			0.84
1942	0.78	0.49	0.52	0.97	0.81				0.72
1943	0.68	1.02	0.92	0.86					0.87
1944	0.77	0.84	0.54						0.71
1945	0.37	0.74							0.56
1946	0.49								0.49
$f_{\bullet,x}$	0.69	0.84	0.68	0.91	0.84	0.72	0.36	0.41	$f_{\bullet,\bullet} = 0.74$

Ansatz
Multiplikative Struktur und Bayes-Ansatz

Ziel ist eine Anpassung der vorgegebenen Todesfallwahrscheinlichkeiten, so dass die kalibrierte Sterbetafel $\tilde{Q}_m = \{\tilde{q}_{g,x}\,;\,(g,x) \in G_m \times X_m\}$ das Sterbeverhalten im betrachteten Bestand adäquat widerspiegelt.

Basis ist der multiplikative Ansatz

$$\tilde{q}_{g,x} = \varphi_g\, \psi_x\, \left(f_{\bullet,\bullet}\, q_{g,x}\right)\ ,\ (g,x) \in G_m \times X_m\,.$$

Die Bestimmung der Auslenkungsfaktoren $\varphi = (\varphi_{g_1}, \ldots, \varphi_{g_m})^T$, $\psi = (\psi_{x_1}, \ldots, \psi_{x_m})^T$ erfolgt mittels Kredibilitätstheorie. Dazu werden

- die beobachteten Anzahlen an Todesfällen, $d_{g,x}$, als Realisierungen von Zufallsvariablen $D_{g,x}$, und
- die Vektoren φ, ψ der Auslenkungsfaktoren als Realisierungen von Zufallsvektoren $\Phi = (\Phi_{g_1}, \ldots, \Phi_{g_m})^T$, $\Psi = (\Psi_{x_1}, \ldots, \Psi_{x_m})^T$

aufgefasst.

Ansatz

Multiplikative Struktur und Bayes-Ansatz

Der (inhomogene) Kredibilitäts-Schätzer, etwa für einen generationenabhängigen Faktor Φ_g, ist der bestmögliche Schätzer aus der Klasse

$$L(D,1) = \left\{ a_0 + \sum_g \sum_x a_{g,x}\, D_{g,x} \; ; \; a_0, a_{g,x} \in \mathbb{R} \right\} .$$

Dabei bedeutet „bestmöglich", dass der Schätzer $\Phi_g^{(\mathrm{kred})} \in L(D,1)$ die Bedingung

$$\mathrm{E}\left[\left(\Phi_g^{(\mathrm{kred})} - \Phi_g\right)^2\right] \leq \mathrm{E}\left[(\Phi - \Phi_g)^2\right] \;, \forall\, \Phi \in L(D,1)\,,$$

erfüllt (vgl. [BG05, Kapitel 3]).

Modellierung

... der Anzahl an Todesfällen

(S$_1$) Sei $\Omega_{g,x} = \{\omega_1, ..., \omega_{\ell_{g,x}}\}$ der Teilbestand der x-jährigen Rentner, welche im Jahr $g \in G_m$ geboren wurden. Für jede Person dieses Teilportfolios wird

$$D_{g,x}(\omega_i) := \begin{cases} 1 \ , & \text{falls } \omega_i \text{ im } (x+1)\text{-ten Lebensjahr stirbt,} \\ 0 \ , & \text{falls } \omega_i \text{ das } (x+1)\text{-te Lebensjahr überlebt,} \end{cases}$$

definiert. Wir nehmen an, dass jeder Rentner $\omega_i \in \Omega_{g,x}$ die gleiche Sterblichkeit $\tilde{q}_{g,x}(\Phi, \Psi) = \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g,x}$ aufweist, so dass

$$P[D_{g,x}(\omega_i) = k \,|\, \Phi, \Psi] \qquad = \begin{cases} 1 - \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g.x} & , \text{ falls } k = 0 \, , \\ \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g.x} & , \text{ falls } k = 1 \, . \end{cases}$$

Modellierung
... der Anzahl an Todesfällen

(S₁) Sei $\Omega_{g,x} = \{\omega_1, \ldots, \omega_{\ell_{g,x}}\}$ der Teilbestand der x-jährigen Rentner, welche im Jahr $g \in G_m$ geboren wurden. Für jede Person dieses Teilportfolios wird

$$D_{g,x}(\omega_i) := \begin{cases} 1 \text{ , falls } \omega_i \text{ im } (x+1)\text{-ten Lebensjahr stirbt,} \\ 0 \text{ , falls } \omega_i \text{ das } (x+1)\text{-te Lebensjahr überlebt,} \end{cases}$$

definiert. Wir nehmen an, dass jeder Rentner $\omega_i \in \Omega_{g,x}$ die gleiche Sterblichkeit $\tilde{q}_{g,x}(\Phi, \Psi) = \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g,x}$ aufweist, so dass

$$P[D_{g,x}(\omega_i) = k \,|\, \Phi, \Psi] \quad = \begin{cases} 1 - \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g.x} & \text{, falls } k = 0\,, \\ \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g.x} & \text{, falls } k = 1\,. \end{cases}$$

(S₂) Die Summe $D_{g,x} = \sum_{i=1}^{\ell_{g,x}} D_{g,x}(\omega_i)$ ist bedingt binomialverteilt,

$$D_{g,x}|(\Phi_g, \Psi_x) \sim \mathrm{B}(\ell_{g,x}\,, \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g,x})\,,$$

sofern Todesfälle innerhalb $\Omega_{g,x}$ unabhängig voneinander eintreten.

Modellierung

... der Anzahl an Todesfällen

(S_1) Sei $\Omega_{g,x} = \{\omega_1, ..., \omega_{\ell_{g,x}}\}$ der Teilbestand der x-jährigen Rentner, welche im Jahr $g \in G_m$ geboren wurden. Für jede Person dieses Teilportfolios wird

$$D_{g,x}(\omega_i) := \begin{cases} 1 \ , & \text{falls } \omega_i \text{ im } (x+1)\text{-ten Lebensjahr stirbt,} \\ 0 \ , & \text{falls } \omega_i \text{ das } (x+1)\text{-te Lebensjahr überlebt,} \end{cases}$$

definiert. Wir nehmen an, dass die Sterblichkeit $\tilde{q}_{g,x}(\Phi, \Psi)$ für jeden Rentner $\omega_i \in \Omega_{g,x}$ durch eine Zufallsvariable Θ_i mit $\mathrm{E}[\Theta_i] = 1$ ausgelenkt wird, so dass

$$P[D_{g,x}(\omega_i) = k \mid \Phi, \Psi, \Theta_i] = \begin{cases} 1 - \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g.x} \, \Theta_i \ , & \text{falls } k = 0 \, , \\ \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g.x} \, \Theta_i \ , & \text{falls } k = 1 \, . \end{cases}$$

(S_2) Die Summe $D_{g,x} = \sum_{i=1}^{\ell_{g,x}} D_{g,x}(\omega_i)$ ist bedingt binomialverteilt,

$$D_{g,x} | (\Phi_g, \Psi_x) \sim \mathrm{B}(\ell_{g,x} \, , \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, q_{g,x}) \, ,$$

sofern Todesfälle innerhalb $\Omega_{g,x}$ unabhängig voneinander eintreten und die Schwankungen $\Theta_1, ..., \Theta_{\ell_{g,x}}$ voneinander unabhängig sind.

Modellierung

... der Anzahl an Todesfällen

Lemma

Seien $\Theta_i, X_i, i = 1, ..., n$, Zufallsvariablen mit folgenden Eigenschaften:

(V_1) Die Zufallsvariablen $\Theta_i, i = 1, ..., n$, sind voneinander unabhängig mit Werten in $[0, 1]$ und $\mathrm{E}[\Theta_i] = p$.

(V_2) Die Zufallsvariablen $X_i, i = 1, ..., n$, sind bedingt, gegeben Θ_i, unabhängig mit

$$P[X_i = k \mid \Theta_i] = \begin{cases} 1 - \Theta_i & , \text{ falls } k = 0 , \\ \Theta_i & , \text{ falls } k = 1 . \end{cases}$$

Dann ist $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ binomialverteilt mit Parametern n und p, d.h. $Y \sim \mathrm{B}(n, p)$.

Beweis: Die Behauptung folgt durch Berechnung der momenterzeugenden Funktion, $M_Y(r) = \mathrm{E}[\exp(r\,Y)]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\exp(r\,Y)] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[\exp(r\,Y) \mid \Theta_1, ..., \Theta_n]] = \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^n [1 - \Theta_i + \Theta_i \exp(r)]\right] \\ &= \prod_{i=1}^n \{1 - \mathrm{E}[\Theta_i] + \mathrm{E}[\Theta_i] \exp(r)\} = [1 - p + p \exp(r)]^n \quad , r \in \mathbb{R} . \end{aligned}$$

Modellierung

... der Anzahl an Todesfällen

(S$_2$) Die Summe $D_{g,x} = \sum_{i=1}^{\ell_{g,x}} D_{g,x}(\omega_i)$ ist bedingt binomialverteilt,

$$D_{g,x}|(\Phi_g, \Psi_x) \sim \mathrm{B}(\ell_{g,x}\,,\, \Phi_g\, \Psi_x\, f_{\bullet,\bullet}\, q_{g,x})\,.$$

Modellierung

... der Anzahl an Todesfällen

(S$_2$) Die Summe $D_{g,x} = \sum_{i=1}^{\ell_{g,x}} D_{g,x}(\omega_i)$ ist bedingt binomialverteilt,

$$D_{g,x}|(\Phi_g, \Psi_x) \sim \mathrm{B}(\ell_{g,x}\,, \Phi_g\, \Psi_x\, f_{\bullet,\bullet}\, q_{g,x})\,.$$

(S$_3$) Der Einfachheit halber gehen wir näherungsweise davon aus, dass die Anzahl $D_{g,x}$ an Todesfällen bedingt Poisson-verteilt ist:

$$D_{g,x}|(\Phi_g, \Psi_x) \sim \mathrm{Poi}(\Phi_g\, \Psi_x\, f_{\bullet,\bullet}\, e_{g,x})\,.$$

Somit gilt insbesondere

$$\mathrm{E}\left[D_{g,x}\middle|\, \Phi, \Psi\right] = \mathrm{Var}\left[D_{g,x}\middle|\, \Phi, \Psi\right] = \Phi_g\, \Psi_x\, f_{\bullet,\bullet}\, e_{g,x}\,.$$

Modellierung

... der Kovarianzen zwischen den Auslenkungsfaktoren

Wir nehmen an, dass die Kovarianz-Matrix des Zufallsvektors $\Phi = (\Phi_{g_1}, ..., \Phi_{g_m})^T$ der generationenabhängigen Auslenkungsfaktoren aus den Elementen

$$\mathrm{Cov}\left[\Phi_{g_i}, \Phi_{g_j}\right] = \begin{cases} \tau_\Phi^2 \, \rho_\Phi^{|g_i - g_j|} & \text{, falls } \rho_\Phi \in (0,1] \,, \\ \tau_\Phi^2 \, \delta_{i,j} & \text{, falls } \rho_\Phi = 0 \,, \end{cases} \qquad \text{mit } \tau_\Phi > 0 \,, \, \rho \in [0,1] \,,$$

besteht. Daraus folgt:

- Alle Zufallsvariablen $\Phi_{g_1}, ..., \Phi_{g_m}$ besitzen die gleiche Varianz τ_Φ^2.
- Die Korrelation zweier Faktoren Φ_{g_i}, Φ_{g_j} hängt nur vom Abstand $|g_i - g_j|$ der Generationen ab. Das Ausmass der Abhängigkeit wird durch ρ_Φ bestimmt.

  Grenzfälle:

  $\rho_\Phi = 0 \implies \Phi_{g_1}, ..., \Phi_{g_m}$ unkorreliert,

  $\rho_\Phi = 1 \implies \Phi_{g_1}, ..., \Phi_{g_m}$ vollständig korreliert.

Wir nehmen an, dass die Kovarianz-Matrix des Vektors Ψ eine analoge Struktur hat.

Kredibilitätsmodell

Poisson-Modell

Annahmen (P_K)

(V_1) Die Zufallsvariablen $D_{g,x}$ sind bedingt, gegeben $\{\Phi, \Psi\}$, unabhängig, wobei

$$\mathrm{E}\left[D_{g,x}|\Phi, \Psi\right] = \mathrm{Var}\left[D_{g,x}|\Phi, \Psi\right] = \Phi_g \, \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, e_{g,x} \, .$$

(V_2) Die Zufallsvariablen $\Phi_{g_1}, \ldots, \Phi_{g_m}$ sind identisch verteilt mit $\mathrm{E}\left[\Phi_g\right] = 1$ und

$$\mathrm{Cov}\left[\Phi, \Phi^T\right] = \tau_\Phi^2 \, \mathcal{R}(\rho_\Phi) \quad \text{mit} \quad (\mathcal{R}(\rho))_{i,j} = \begin{cases} \rho^{|i-j|} & \text{, falls } \rho \in (0, 1] \, , \\ \delta_{i,j} & \text{, falls } \rho = 0 \, . \end{cases}$$

Analog dazu sind $\Psi_{x_1}, \ldots, \Psi_{x_m}$ identisch verteilt mit $\mathrm{E}\left[\Psi_x\right] = 1$ und

$$\mathrm{Cov}\left[\Psi, \Psi^T\right] = \tau_\Psi^2 \, \mathcal{R}(\rho_\Psi) \, .$$

(V_3) Die Zufallsvektoren Φ and Ψ sind voneinander unabhängig.

Kredibilitäts-Schätzer

... zur Bestimmung eines einzelnen Auslenkungsvektors

Theorem

(E₁) Der Vektor $\Psi = (\Psi_{x_1}, \ldots, \Psi_{x_m})^T$ sei gegeben. Wir definieren

$$F^{(\Psi)} = \left(F^{(\Psi)}_{g_1,\bullet}, \ldots, F^{(\Psi)}_{g_m,\bullet}\right)^T \quad \text{mit} \quad F^{(\Psi)}_{g,\bullet} = \frac{\sum_x D_{g,x}}{\sum_x e^{(\Psi)}_{g,x}} \;, \; e^{(\Psi)}_{g,x} = \Psi_x \, f_{\bullet,\bullet} \, e_{g,x} \, .$$

Unter den Annahmen (P_K) resultiert dann für Φ der Kredibilitäts-Schätzer

$$\Phi^{(\text{kred})} = \left(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{(\Psi)}\right) \cdot \mathbf{1} + \mathcal{A}^{(\Psi)} \cdot F^{(\Psi)} = \mathbf{1} + \mathcal{A}^{(\Psi)} \cdot \left(F^{(\Psi)} - \mathbf{1}\right),$$

$$\text{mit} \quad \mathcal{A}^{(\Psi)} = \mathcal{R}(\rho_\Phi) \cdot \left(\mathcal{R}(\rho_\Phi) + \tau_\Phi^{-2} \left(\mathcal{W}^{(\Psi)}\right)^{-1}\right)^{-1} ,$$

$$\text{wobei} \quad \left(\mathcal{W}^{(\Psi)}\right)_{i,j} = \delta_{i,j} \sum_x e^{(\Psi)}_{g_i,x} \, .$$

(E₂) Ist Φ bekannt, resultiert ein analoger Kredibilitäts-Schätzer $\Psi^{(\text{kred})}$ für Ψ.

Der Beweis basiert auf [BG05, Theoreme 7.2, 7.12] (H. Bühlmann, A. Gisler, 2005).

Kredibilitäts-Schätzer

... zur Bestimmung eines einzelnen Auslenkungsvektors

Bemerkung (Grenzfälle $\rho_\Phi \in \{0, 1\}$)

(G₁) Im Fall $\rho_\Phi = 0$ von unkorrelierten Auslenkungsfaktoren folgt

$$\Phi_g^{(\mathrm{kred})} = \left(1 - a_g^{(\Psi)}\right) + a_g^{(\Psi)} \frac{D_{g,+}}{e_{g,+}^{(\Psi)}} \quad \text{mit} \quad a_g^{(\Psi)} = \frac{e_{g,+}^{(\Psi)}}{e_{g,+}^{(\Psi)} + \tau_\Phi^{-2}} \; , \; g \in G_m \, ,$$

d.h. $\Phi_g^{(\mathrm{kred})}$ hängt nur von Beobachtungen über die Generation g ab.

(G₂) Im Fall $\rho_\Phi = 1$ von vollständig korrelierten Auslenkungsfaktoren folgt

$$\Phi_g^{(\mathrm{kred})} = \left(1 - a^{(\Psi)}\right) + a^{(\Psi)} \frac{D_{+,+}}{e_{+,+}^{(\Psi)}} \quad \text{mit} \quad a^{(\Psi)} = \frac{e_{+,+}^{(\Psi)}}{e_{+,+}^{(\Psi)} + \tau_\Phi^{-2}} \; , \; g \in G_m \, ,$$

d.h. $\Phi_g^{(\mathrm{kred})}$ hängt von den Beobachtungen aller Generationen gleichermassen ab.

Im späteren numerischen Beispiel hat τ_Φ^{-2} Werte im Bereich von 29 bis 35.

Iterativer Schätzer

... zur simultanen Bestimmung aller Auslenkungsfaktoren

Algorithmus

(I_0) Start: Setze $\psi^{(0)} = \mathbf{1} \in \mathbb{R}^m$.

(I_n) Iteration ($n \longmapsto n+1$):

(a) Berechne $\Phi^{(\text{kred})}$ mit bekanntem $\Psi = \psi^{(n)}$. Setze $\varphi^{(n+1)} = \Phi^{(\text{kred})}$.

(b) Berechne $\Psi^{(\text{kred})}$ mit bekanntem $\Phi = \varphi^{(n+1)}$. Setze $\psi^{(n+1)} = \Psi^{(\text{kred})}$.

Als Auslenkungsfaktoren φ, ψ werden die Grenzwerte der Iteration verwendet.

Bemerkungen

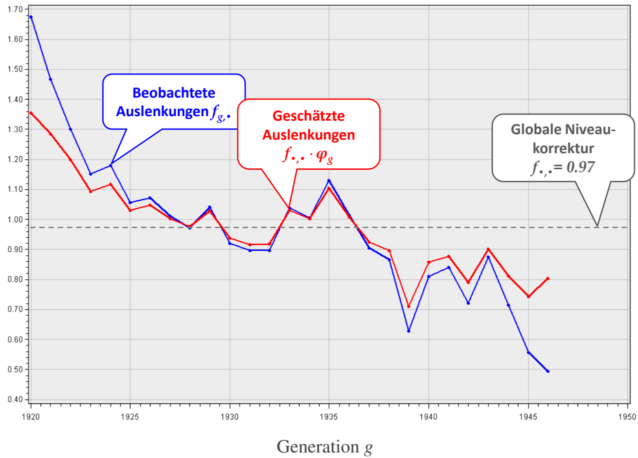
(B_1) Die Grenzwerte hängen nicht davon ab, ob die Iteration mit $\psi^{(0)} = \mathbf{1}$ oder $\varphi^{(0)} = \mathbf{1}$ beginnt.

(B_2) Die Parameter τ_Φ und τ_Ψ werden in jedem Iterationsschritt geschätzt.

(B_3) Die Werte der Parameter ρ_Φ und ρ_Ψ entsprechen aktuariellen Annahmen und variieren während der Iteration nicht.

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und $f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g$ für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

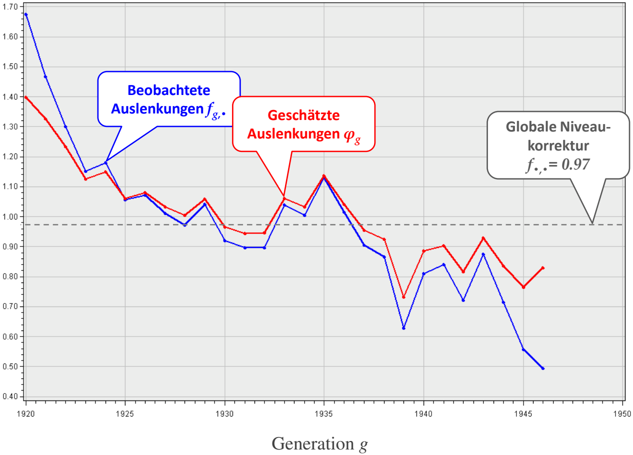
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1737,$ $\tau_\Psi = 0.0642.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

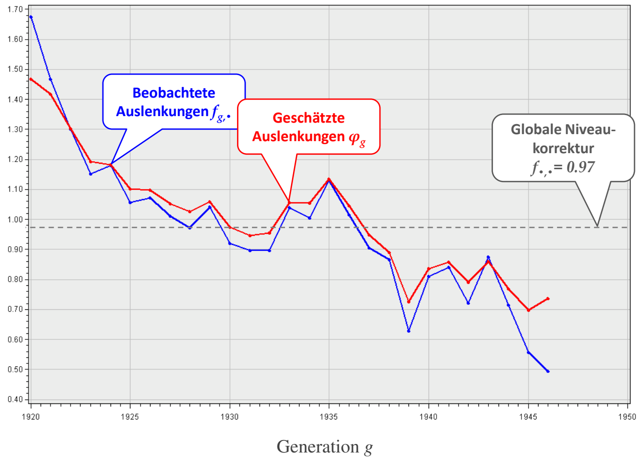
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1737,$
  $\tau_\Psi = 0.0642.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

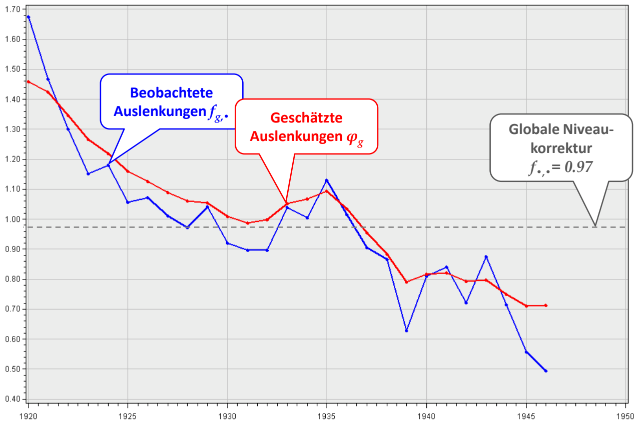
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.500.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1798,$ $\tau_\Psi = 0.0541.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Generation g

Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

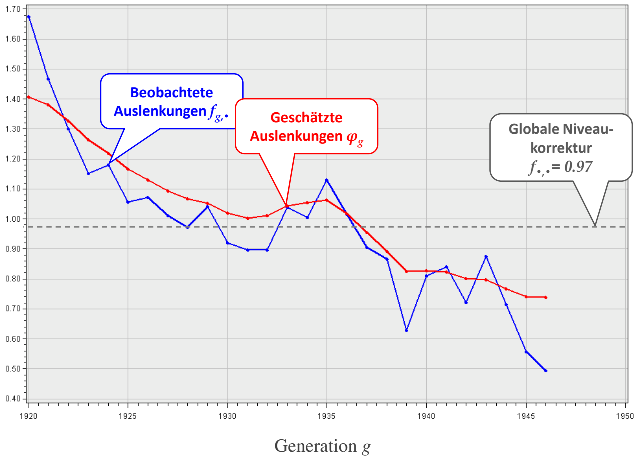
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.900.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1867,$ $\tau_\Psi = 0.0620.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

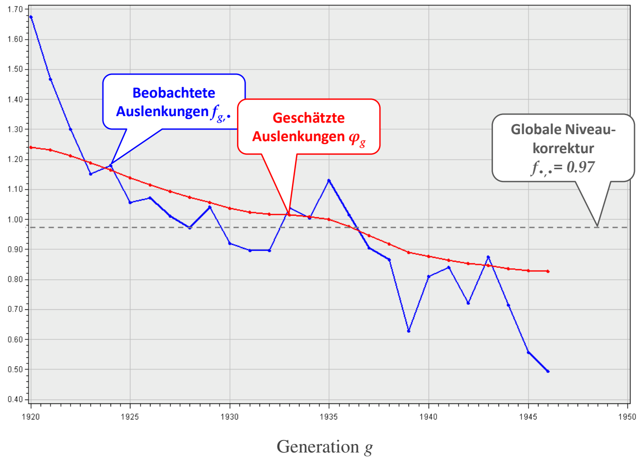
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1835,$
  $\tau_\Psi = 0.0663.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

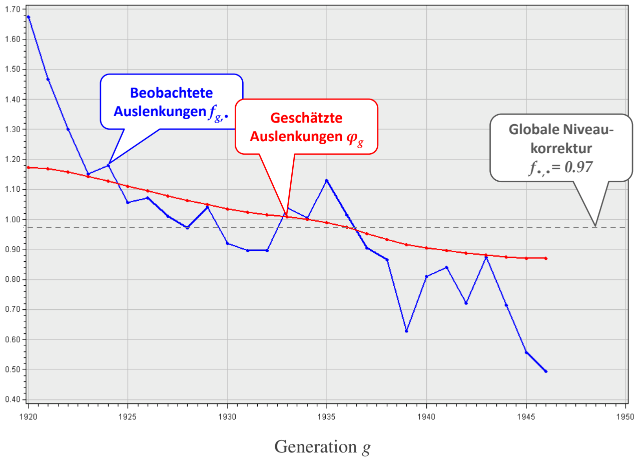
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.990.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1712,$ $\tau_\Psi = 0.0833.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

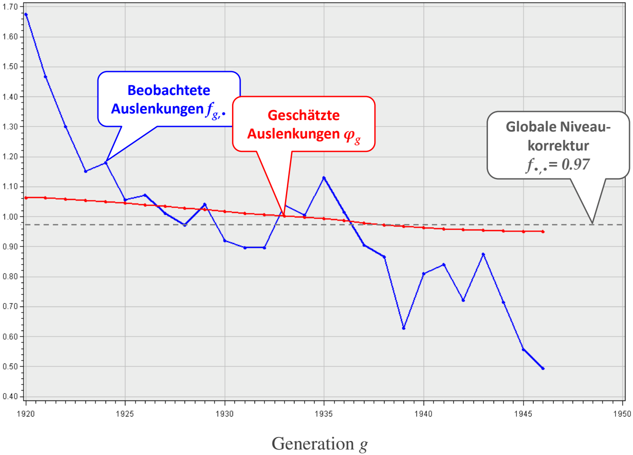
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.995.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1676,$
  $\tau_\Psi = 0.0957.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

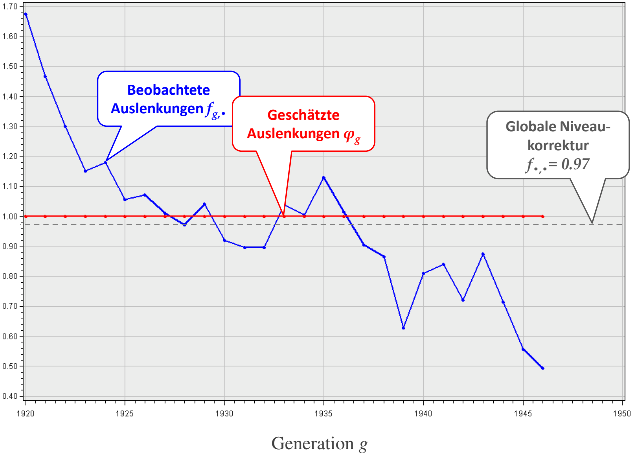
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.999.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1679,$
  $\tau_\Psi = 0.1277.$

Generationen-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{g,\bullet}$ und φ_g

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

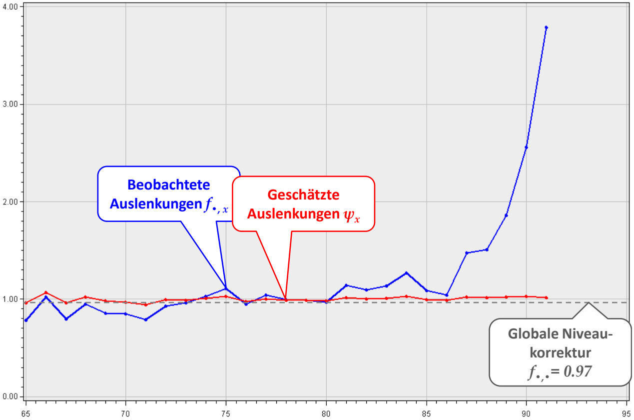
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 1.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1767,$ $\tau_\Psi = 0.1523.$

Alters-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Alter x

Auslenkungen $f_{\bullet,x}$ und ψ_x

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

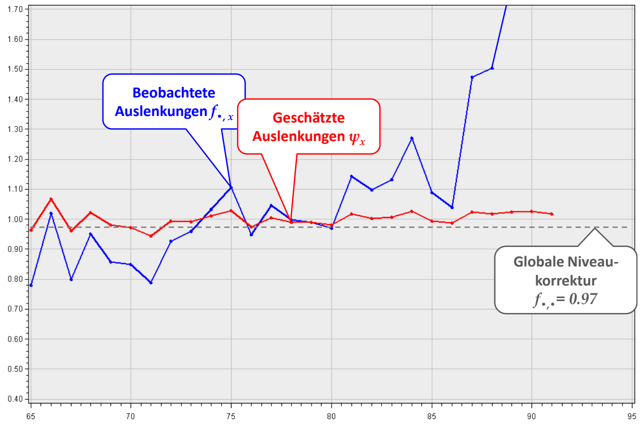
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1737,$ $\tau_\Psi = 0.0642.$

Alters-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Alter x

Auslenkungen $f_{\bullet,x}$ und ψ_x

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

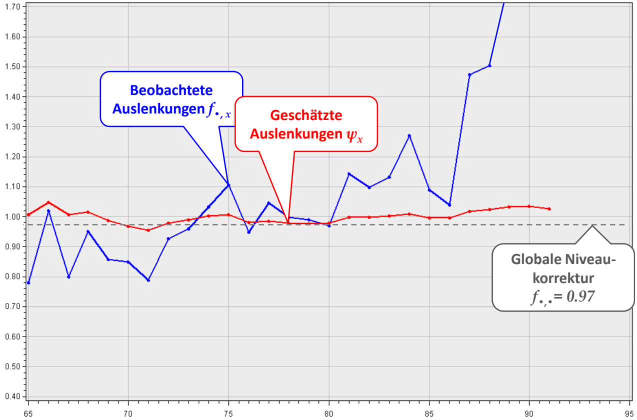
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1737,$ $\tau_\Psi = 0.0642.$

Alters-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Alter x

Auslenkungen $f_{\bullet,x}$ und ψ_x

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

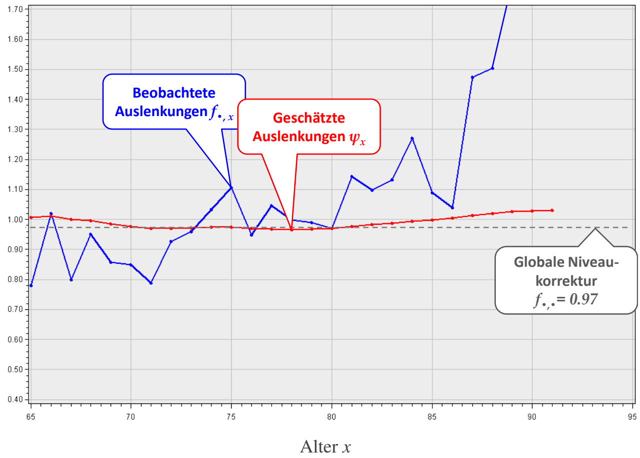
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.500.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1798,$ $\tau_\Psi = 0.0541.$

Alters-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{\bullet,x}$ und ψ_x

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

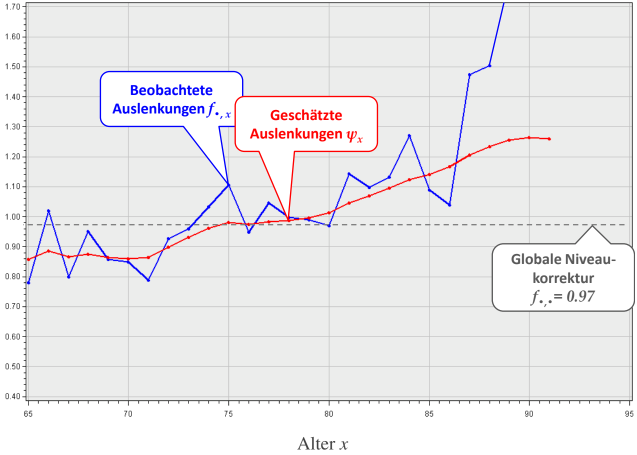
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1835,$
  $\tau_\Psi = 0.0663.$

Alters-Effekt

Beobachtete und geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen $f_{\bullet,x}$ und ψ_x

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:

  $\rho_\Phi = 0.999,$

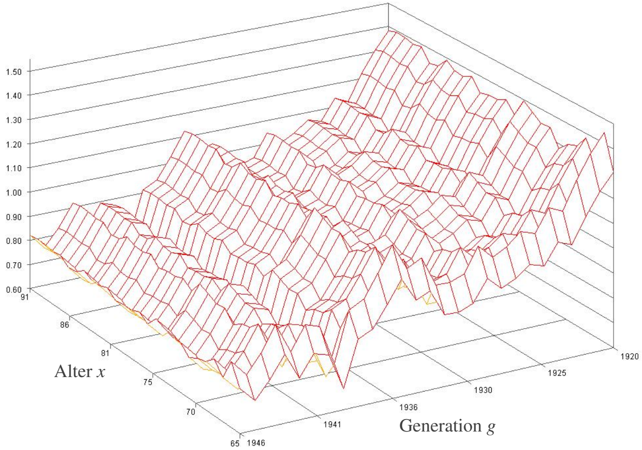
  $\rho_\Psi = 0.950.$

- Schätzungen:

  $\tau_\Phi = 0.1308,$

  $\tau_\Psi = 0.1442.$

Resultierende Korrektur
Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen
$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$

für ein Portfolio von Altersrentnern

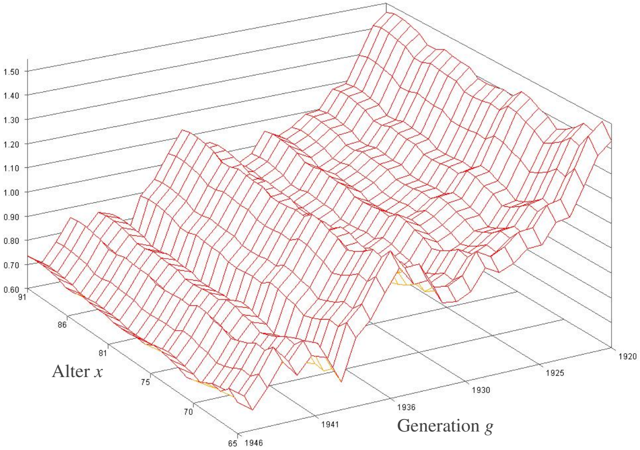
- Männer,
- Kollektivversicherung.

Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1737,$ $\tau_\Psi = 0.0642.$

Resultierende Korrektur
Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen
$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$

für ein Portfolio von Altersrentnern

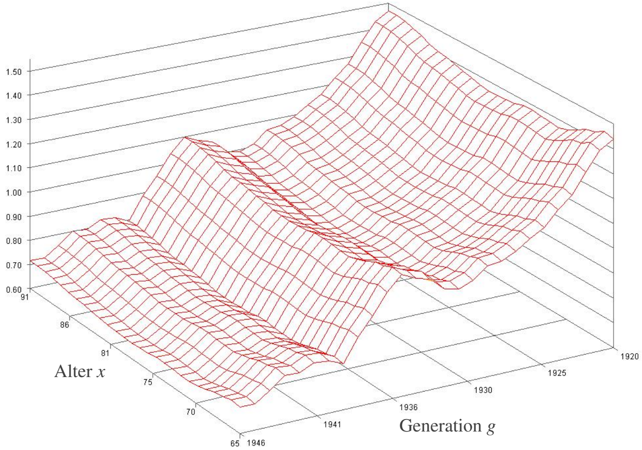
- Männer,
- Kollektivversicherung.

Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.500.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1798,$ $\tau_\Psi = 0.0541.$

Resultierende Korrektur
Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen
$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$

für ein Portfolio
von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

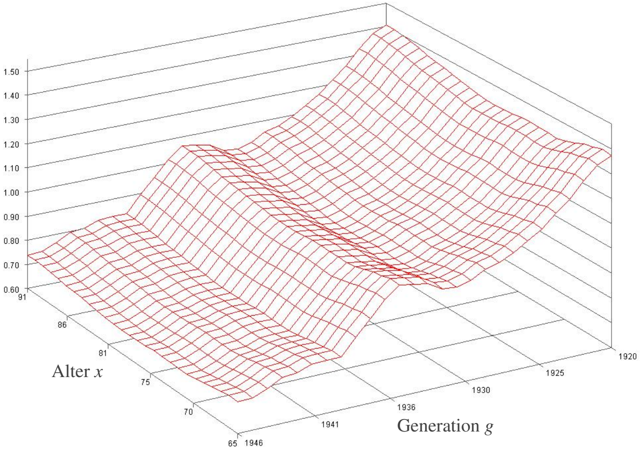
Zu überprüfende
Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.900.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1867,$
  $\tau_\Psi = 0.0620.$

Resultierende Korrektur

Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen
$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$
für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

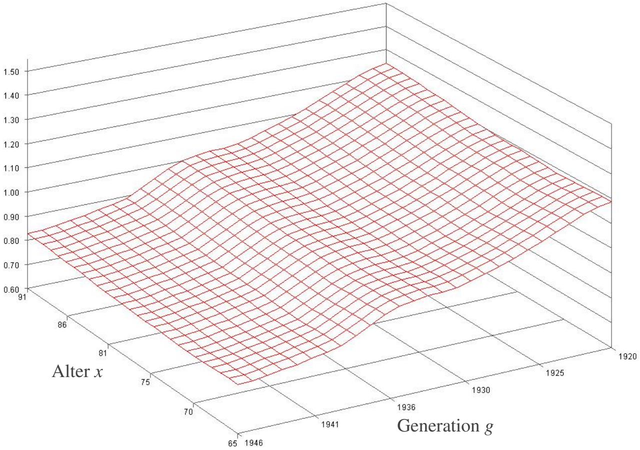
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1835,$
  $\tau_\Psi = 0.0663.$

Resultierende Korrektur

Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen
$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$
für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

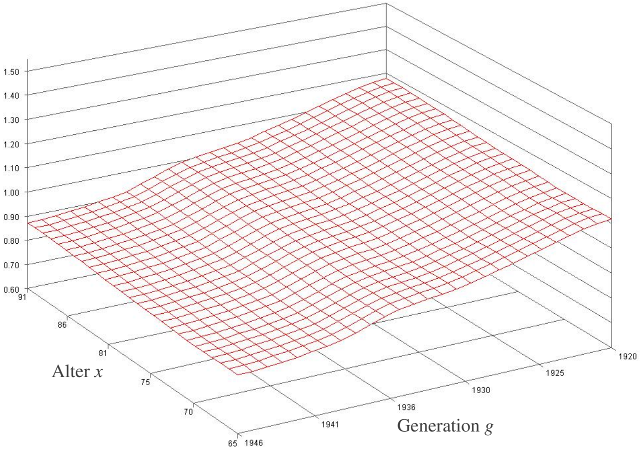
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.990.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1712,$ $\tau_\Psi = 0.0833.$

Resultierende Korrektur

Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen

$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

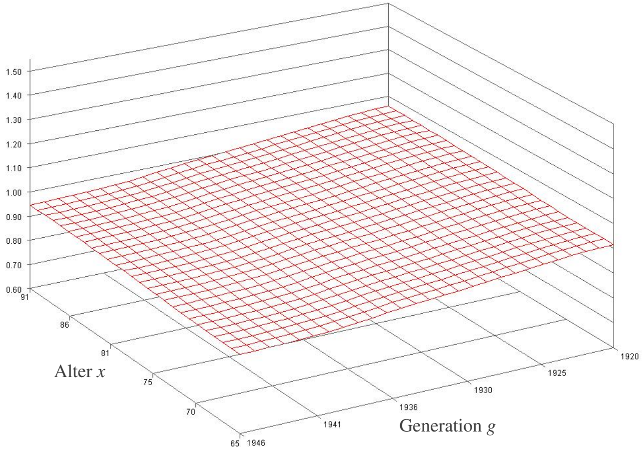
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen: $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.995.$
- Schätzungen: $\tau_\Phi = 0.1676,$ $\tau_\Psi = 0.0957.$

Resultierende Korrektur

Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen

$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$

für ein Portfolio von Altersrentnern

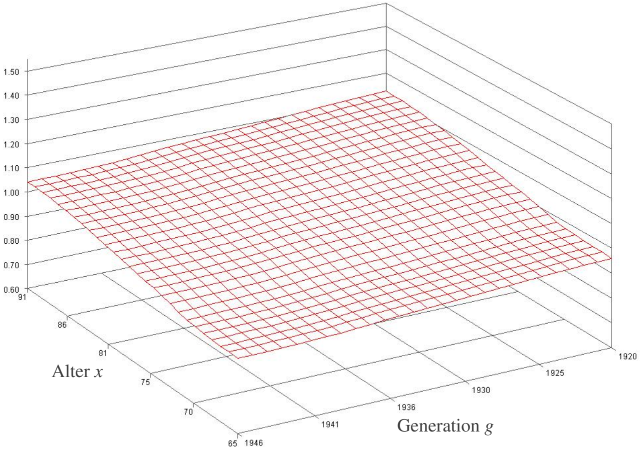
- Männer,
- Kollektivversicherung.

Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.999.$
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1679,$
  $\tau_\Psi = 0.1277.$

Resultierende Korrektur
Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen
$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$

für ein Portfolio
von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

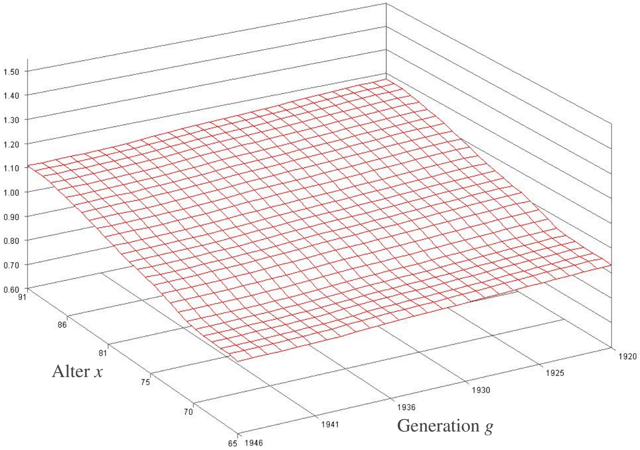
Zu überprüfende
Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = 0.999$,
  $\rho_\Psi = 0.995$.
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1461$,
  $\tau_\Psi = 0.1345$.

Resultierende Korrektur

Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen
$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$
für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

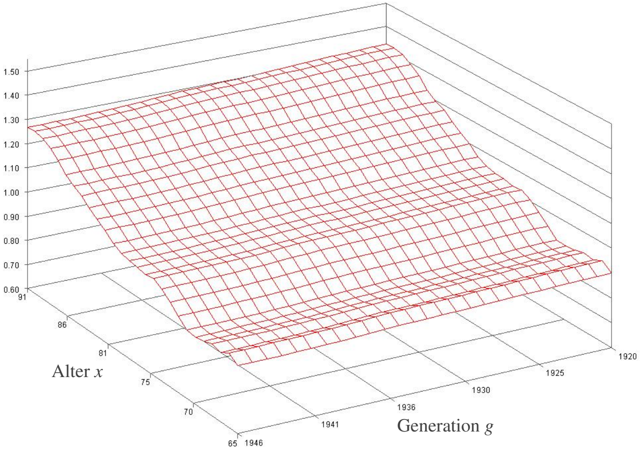
Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = 0.999$,
  $\rho_\Psi = 0.990$.
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1348$,
  $\tau_\Psi = 0.1380$.

Resultierende Korrektur

Geschätzte Auslenkungsfaktoren



Auslenkungen

$f_{\bullet,\bullet} \cdot \varphi_g \cdot \psi_x$

für ein Portfolio von Altersrentnern

- Männer,
- Kollektivversicherung.

Zu überprüfende Sterbetafel: GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahmen:
  $\rho_\Phi = 0.999$,
  $\rho_\Psi = 0.950$.
- Schätzungen:
  $\tau_\Phi = 0.1308$,
  $\tau_\Psi = 0.1442$.

Kredibilitätsmodell

Risikogruppen

Wir unterteilen das betrachtete Rentner-Portfolio in Risikogruppen $B_1, \ldots, B_r$. Ziel ist die Differenzierung der kalibrierten Sterbetafel $\tilde{\mathcal{Q}}_m = \{\tilde{q}_{g,x}\,;\ (g,x) \in G_m \times X_m\}$ entsprechend dem Sterbeverhalten in den Risikogruppen.

Die Differenzierung erfolgt durch altersabhängige Auslenkungen, d.h. pro Risikogruppe B_k wird ein Vektor $\psi(k) = (\psi_{x_1}(k), \ldots, \psi_{x_m}(k))^T$ mit altersabhängigen Auslenkungsfaktoren bezüglich der kalibrierten Sterbetafel hergeleitet. Für jede Risikogruppe B_k, $k \in \{1, \ldots, r\}$, ergeben sich dann die Todesfallwahrscheinlichkeiten

$$\tilde{q}_{g,x}(k) = \psi_x(k)\,\tilde{q}_{g,x} = \psi_x(k)\,\left(\varphi_g\,\psi_x\,f_{\bullet,\bullet}\,q_{g,x}\right)\ ,\ (g,x) \in G_m \times X_m\,.$$

Wir verwenden folgende Notationen:

(N_1) Die in Risikogruppe B_k gemäss der kalibrierten Sterbetafel $\tilde{\mathcal{Q}}_m$ erwarteten Anzahlen an Todesfällen werden mit $e_{g,x}(k)$ bezeichnet.

(N_2) Die in Risikogruppe B_k beobachteten Anzahlen an Todesfällen werden mit $d_{g,x}(k)$ bezeichnet. Sie sind Realisierungen von Zufallsvariablen $D_{g,x}(k)$.

Kredibilitätsmodell
Poisson-Modell

Die zu bestimmenden Auslenkungen $\psi(k) = (\psi_{x_1}(k), \ldots, \psi_{x_m}(k))^T$, $k = 1, \ldots, r$, werden als Realisierungen von Zufallsvektoren $\Psi(k) = (\Psi_{x_1}(k), \ldots, \Psi_{x_m}(k))^T$ aufgefasst.

Annahmen (P_D)

(V_1) Die Zufallsvariablen $D_{g,x}(k)$, $k = 1, \ldots, r$, sind bedingt, gegeben $\Psi(k)$, unabhängig, wobei

$$\mathrm{E}\left[D_{g,x}(k) | \Psi(k)\right] = \mathrm{Var}\left[D_{g,x}(k) | \Psi(k)\right] = \Psi_x(k)\, e_{g,x}(k)\,.$$

(V_2) Alle Paarungen $(\Psi(k), D_{g,x}(k))$, $k = 1, \ldots, r$, sind voneinander unabhängig.

(V_3) Die Zufallsvektoren $\Psi(k)$, $k = 1, \ldots, r$, sind voneinander unabhängig und identisch verteilt mit

$$\mathrm{E}\left[\Psi(k)\right] = \mathbf{1} \;\;,\;\; \mathrm{Cov}\left[\Psi(k), (\Psi(k))^T\right] = \tau^2\, \mathcal{R}(\rho)\,.$$

Kredibilitäts-Schätzer

... zur Bestimmung der Auslenkungsfaktoren

Theorem

Wir definieren

$$F(k) = \left(\frac{D_{+,x_1}(k)}{e_{+,x_1}(k)}, \dots, \frac{D_{+,x_m}(k)}{e_{+,x_m}(k)} \right)^T \, , \; k = 1, \dots, r \, .$$

Unter den Annahmen (P_K) resultieren dann für $\Psi(i)$ die Kredibilitäts-Schätzer

$$\begin{aligned} \Psi^{(\text{kred})}(k) &= (\mathcal{I} - \mathcal{A}(k)) \cdot \mathbf{1} + \mathcal{A}(k) \cdot F(k) \\ &= \mathbf{1} + \mathcal{A}(k) \cdot (F(k) - \mathbf{1}) \end{aligned}$$

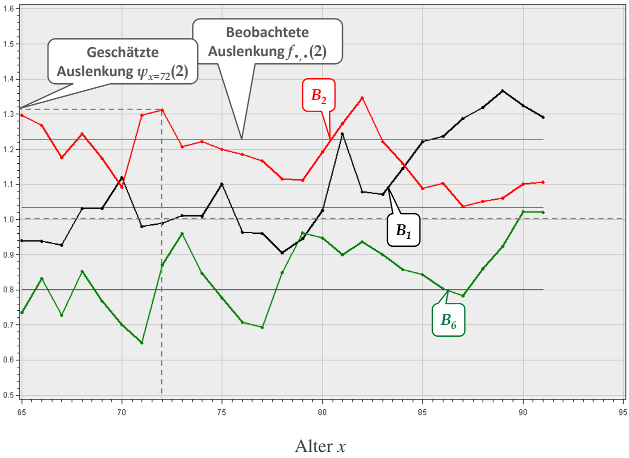
$$\text{mit } \; \mathcal{A}(k) = \mathcal{R}(\rho) \cdot \left(\mathcal{R}(\rho) + \tau^{-2} \, (\mathcal{W}(k))^{-1} \right)^{-1} , \, (\mathcal{W}(k))_{i,j} = \delta_{i,j} \, e_{+,x_j}(k) \, .$$

Bemerkung

Der Parameter τ wird geschätzt. Der Wert von ρ entspricht hingegen einer aktuariellen Annahme.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, 2, 6$)



Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

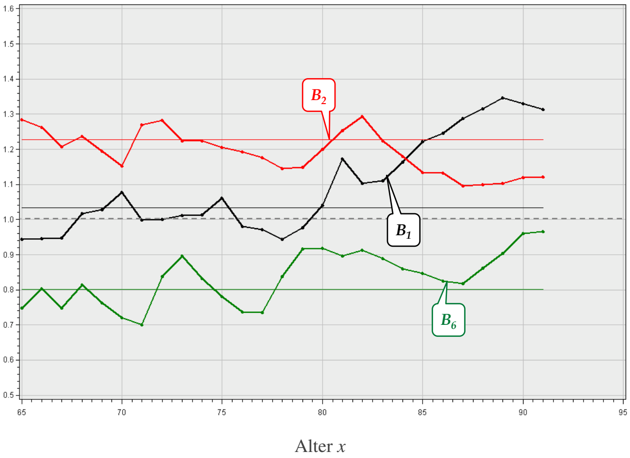
für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,
- Männer,
- Kollektivversicherung.

Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:
- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.800$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, 2, 6$)



Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

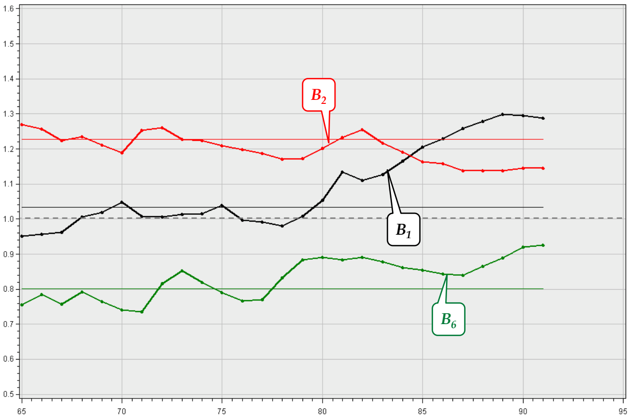
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.900$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, 2, 6$)



Alter x

Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

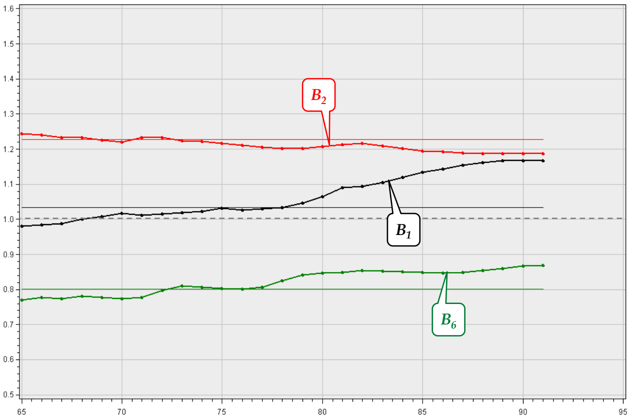
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.950$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, 2, 6$)



Alter x

Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

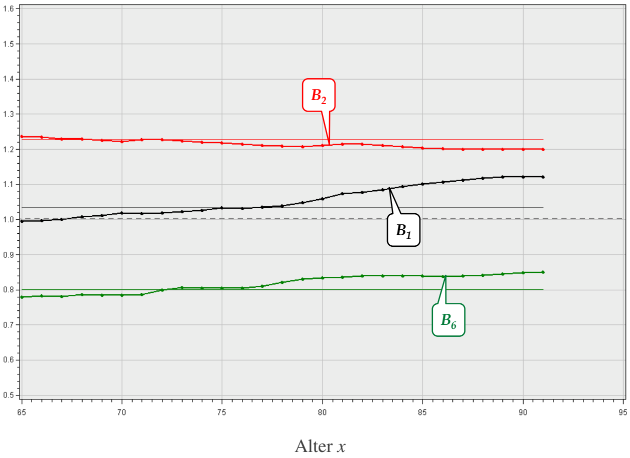
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.990$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, 2, 6$)



Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

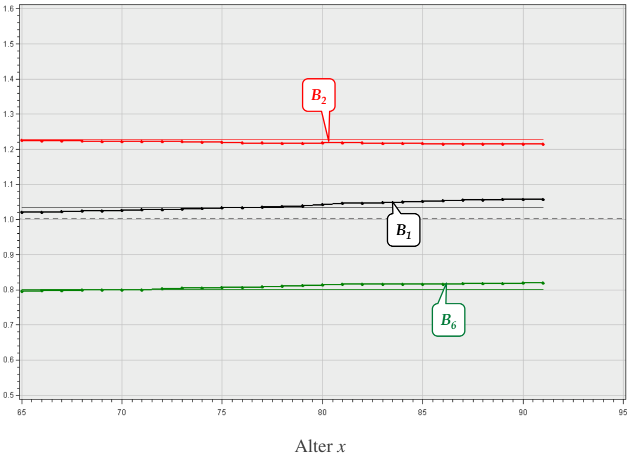
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.995$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, 2, 6$)



Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

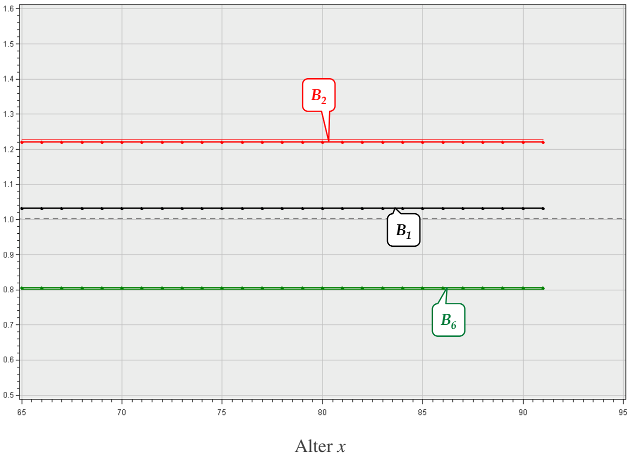
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.999$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, 2, 6$)



Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$ für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

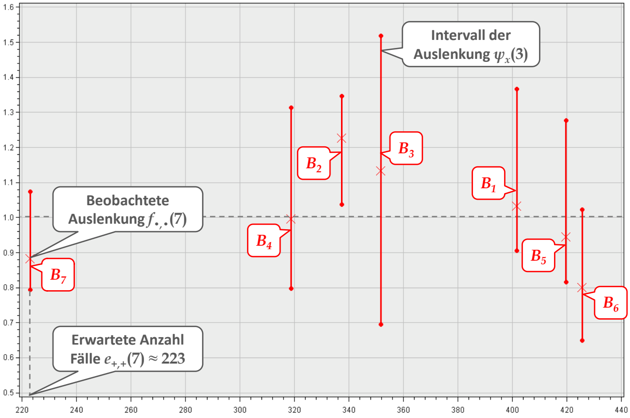
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 1.000$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, \ldots, 7$)



Erwartete Anzahl an Todesfällen $e_{+,+}(i)$

Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$ für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

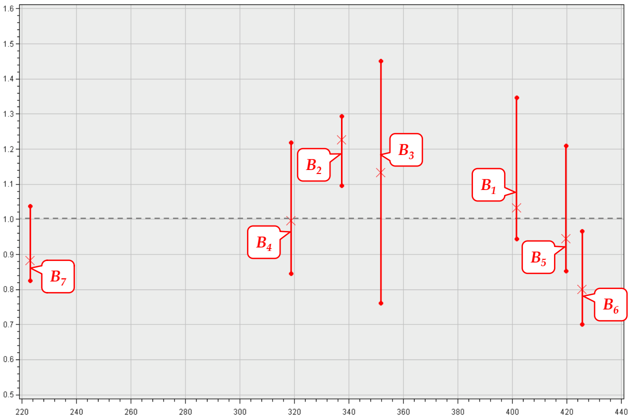
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.800$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, \ldots, 7$)



Erwartete Anzahl an Todesfällen $e_{+,+}(i)$

Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

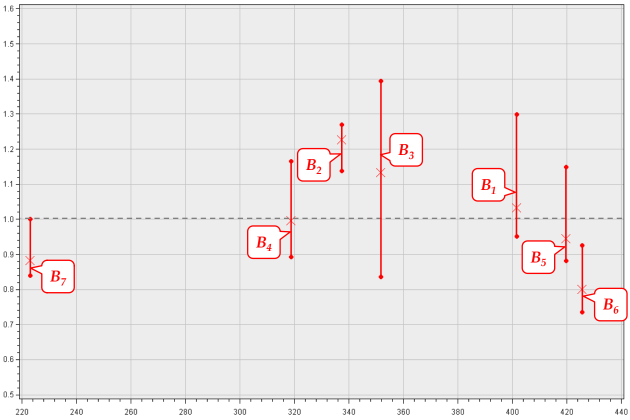
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.900$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, \ldots, 7$)



Erwartete Anzahl an Todesfällen $e_{+,+}(i)$

Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$ für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

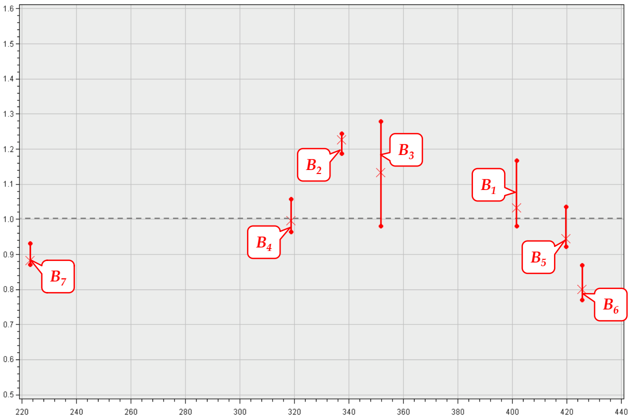
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.950$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, \ldots, 7$)



Erwartete Anzahl an Todesfällen $e_{+,+}(i)$

Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

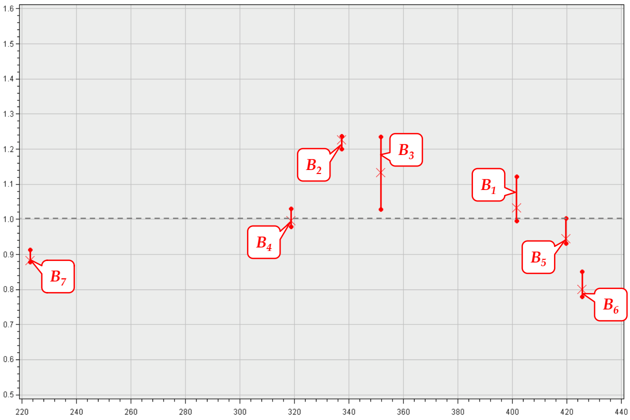
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.990$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, \ldots, 7$)



Erwartete Anzahl an Todesfällen $e_{+,+}(i)$

Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

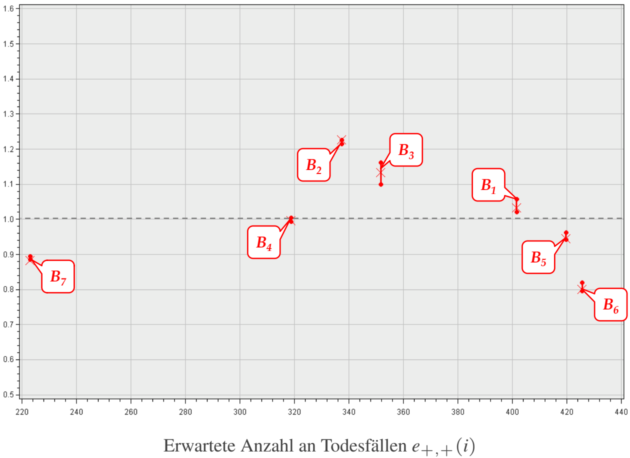
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.995$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, \ldots, 7$)



Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$ für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

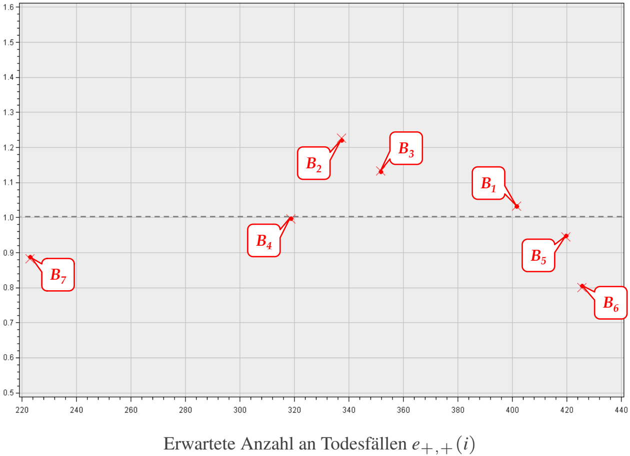
Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 0.999$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Geschätzte Auslenkungsfaktoren

... für die Gruppen B_i von Wirtschaftsbranchen ($i = 1, \ldots, 7$)



Auslenkungen $f_{\bullet,\bullet}(i)$ und $\psi_x(i)$

für Altersrentner der verschiedenen Branchengruppen,

- Männer,
- Kollektivversicherung.

Grundlage ist die (mit $\rho_\Phi = \rho_\Psi = 0.950$) angepasste Tafel GRM 95.

Strukturparameter:

- Aktuarielle Annahme: $\rho = 1.000$.
- Schätzung: $\tau = 0.3219$.

Referenzen

[BG05] H. Bühlmann und A. Gisler: *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.

[Kul12] E. Kuleshova: *Untersuchungen zu Sterbewahrscheinlichkeiten mittels Kredibilitätstheorie*, Masterarbeit, Universität Zürich, 2012.

[Man11] A. Mancini: *Anwendung der Kredibilitätstheorie zur Schätzung von Sterbewahrscheinlichkeiten*, Masterarbeit, ETH Zürich, 2011.

[Mul06] P. Müller: *Ausgleichsverfahren, verallgemeinerte lineare Modelle und Credibility bei additiven und multiplikativen Tarifstrukturen*, Diplomarbeit, ETH Zürich, 2006.